Chapitre 12

# Fractions rationnelles

## Plan du chapitre



**Hypothèse**

Dans tout ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles

### 1.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$

Étant donnés deux polynômes $A$ et $B$ avec $B \neq 0$, on souhaite définir le quotient $\frac{A}{B}$. Si $A$ est un multiple de $B$, i.e. $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, on pourrait poser $\frac{A}{B} := Q$. Mais dans le cas général, $A$ n'est pas un multiple de $B$ et il n'y a pas de moyen clair de définir cette fraction dans $\mathbb{K}[X]$. Il faut un ensemble “plus gros”, qu'on va construire.

On ne demande qu'une chose sur les quantités $\frac{A}{B}$, c'est de vérifier la relation $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$.

**Définition 12.1 (Fraction rationnelle)**

On admet l'existence d'un ensemble

$$\mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{A}{B} \,\middle|\, A, B \in \mathbb{K}[X] \text{ et } B \neq 0 \right\}$$

dont les éléments vérifient

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$$

L'élément $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ est appelé une <u>fraction rationnelle</u>. $\mathbb{K}(X)$ est <u>l'ensemble des fractions rationnelles</u>.

Si $F \in \mathbb{K}(X)$, alors $F$ admet plusieurs écritures possibles, par exemple si $F = \frac{A}{B}$, on peut aussi écrire

$$F = \frac{2A}{2B} = \frac{XA}{XB} = \frac{BA}{B^2}$$

**Exemple 1.**

- $\frac{X}{X^2}$ et $\frac{2}{2X}$ sont deux fractions rationnelles égales : ce sont deux écritures de la fraction $F = \frac{1}{X}$.
- $\frac{1}{4}$ et $\frac{0}{X}$ sont des fractions rationnelles.

**Remarque.** Pour tout polynôme $P$, on peut identifier $P$ et $\frac{P}{1}$ : on dira (abusivement) que tout polynôme est une fraction rationnelle, ou encore que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

- En particulier, on note $0 = \frac{0}{1}$ la fraction rationnelle nulle. Elle a de nombreuses écritures : $0 = \frac{0}{X} = \frac{0}{5X^2}$...
- On a $\frac{A}{B} = 0$ si et seulement si $A = 0$.

### 1.2 Le corps $\mathbb{K}(X)$

**Définition 12.2**

On définit deux l.c.i. $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$ :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} := \frac{AD + BC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} := \frac{AC}{BD} \in \mathbb{K}(X)$$

- Puisque $B \neq 0$ et $D \neq 0$, alors $BD \neq 0$ (car $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Les fractions ci-dessus sont donc bien des éléments de $\mathbb{K}(X)$.
- Si $F, F' \in \mathbb{K}(X)$, alors on peut vérifier que $F + F'$ et $FF'$ ne dépendent pas des écritures de $F$ et de $F'$. Les lois $+$ et $\times$ sont ainsi bien définies.

**Théorème 12.3**

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps.

1. L'élément neutre pour $+$ est la fraction nulle $F = 0$.
2. L'opposé (i.e. symétrique pour $+$) de $\frac{A}{B}$ est la fraction $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$, qu'on peut donc aussi noter $-\frac{A}{B}$.
3. L'élément neutre pour $\times$ est la fraction $F = 1$ (càd $\frac{1}{1}$, $\frac{X}{X}$, ou encore $\frac{B}{B}$ avec $B \neq 0$).
4. Si $\frac{A}{B} \neq 0$, alors nécessairement $A \neq 0$ et on vérifie que $\frac{A}{B}$ admet pour inverse $\frac{B}{A} \in \mathbb{K}(X)$.

### 1.3 Fractions irréductibles et degré

**Définition 12.4 (Fraction irréductible)**

Une fraction rationnelle est dite irréductible (ou sous forme irréductible) si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
Toute fraction $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se réécrire sous forme irréductible : il existe $\frac{A_1}{B_1} \in \mathbb{K}(X)$ telle que

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} \qquad \text{et} \qquad A_1 \wedge B_1 = 1$$

Une fraction $\frac{A}{B}$ admet une infinité de formes irréductibles : si $\frac{A_1}{B_1}$ en est une, toutes les autres sont les fractions

**Exemple 2.** La fraction $\dfrac{X^2-1}{2(X+1)^2}$ n'est pas irréductible car

On peut se ramener à une fraction irréductible en simplifiant par le PGCD :

**Définition (Degré)**

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le degré de $F$ par

$$\deg F := \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$$

- Comme $\deg A \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ et $\deg B \in \mathbb{N}$ (car $B \neq 0$), on a bien $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.
- Le degré de $F$ ne dépend pas de son écriture : si on a $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, alors

  $$\deg A - \deg B = \deg C - \deg D$$

  si bien qu'on peut prendre n'importe quelle écriture pour calculer $\deg F$.
- Attention ! Si $\deg F = 0$, cela n'implique pas que $F$ est constante. Contre-exemple : $F = \dfrac{X+5}{2X-3}$.

**Exemple 3.** Le degré de $\dfrac{1}{X^2}$ est ; Le degré de $\dfrac{(X-1)^2 - X^2}{X(1-X)}$ est

## 2 Fonctions rationnelles

**Définition 12.5 (Racines et pôles)**

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\frac{A}{B}$ pour forme **irréductible**.

- On appelle racine de $F$ tout élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A(\alpha) = 0$, i.e. toute racine de $A$. On définit la multiplicité de $\alpha$ (en tant que racine de $F$) comme étant sa multiplicité en tant que racine de $A$.

- On appelle pôle de $F$ tout élément $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $B(\beta) = 0$, i.e. toute racine de $B$. On définit la multiplicité de $\beta$ (en tant que pôle de $F$) comme étant sa multiplicité en tant que racine de $B$.

**Exemple 4.** Si $F = \frac{1}{(X-\alpha)^k}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, alors $\alpha$ est un pôle de $F$ de multiplicité $k$.

**Exemple 5.** Attention à bien mettre $F$ sous forme irréductible. Si $F = \frac{X^3-1}{X^2-1}$, alors 1 n'est ni racine, ni pôle de $F$. En effet, sous forme irréductible,

$$F = \frac{X^2+X+1}{X+1}$$

si bien que $F$ a pour unique pôle $-1$, et $F$ n'a pas de racines réelles. Cependant, $F$ admet deux racines complexes : $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2$.

**Définition 12.6 (Fonction rationnelle)**

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ qui admet $\frac{A}{B}$ pour forme **irréductible**. On appelle fonction rationnelle (associée à $F$) la fonction

$$\widetilde{F} : x \mapsto \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)}$$

La fonction $\widetilde{F}$ est définie sur $\mathbb{K}$ privé des pôles de $F$ (i.e. des racines de $B$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Les deux définitions précédentes ne dépendent pas du choix de la forme irréductible de $F$ (si $F = \frac{\lambda A}{\lambda B}$ alors on trouve les mêmes racines, pôles et fonction rationnelle $\widetilde{F}$).
- Cette définition de $\widetilde{F}$ est compatible avec les opérations $+, \lambda\cdot, \times$ de $\mathbb{K}$ et de $\mathbb{K}(X)$ :

$$\widetilde{F+G} = \widetilde{F} + \widetilde{G} \qquad \widetilde{F \times G} = \widetilde{F} \times \widetilde{G} \qquad \widetilde{\lambda F} = \lambda \widetilde{F}$$

## 3 Décomposition en éléments simples

Pour intégrer l'expression $\frac{1}{1-x^2}$, on a vu la méthode suivante : pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \qquad \text{donc} \qquad \int_a^b \frac{1}{1-x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|1+x| + \frac{1}{2}\ln|1-x|\right]_a^b$$

Le but de cette section (et du chapitre) est de donner une méthode pour décomposer une fraction rationnelle $F$ de $\mathbb{K}(X)$ de la même façon, de sorte qu'on puisse l'intégrer ensuite très facilement.

Cela se fait en trois étapes : les étapes 2 et 3 varient selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

### 3.1 Début de la méthode ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

**Définition 12.7 (Étape 1 : partie entière + fraction de degré négatif)**

Toute fraction rationnelle $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ peut se décomposer en

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

avec

- $Q \in \mathbb{K}[X]$ un *polynôme* appelé partie entière de $\dfrac{A}{B}$.
- $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ qui vérifie $\deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0$.

Le couple $(Q, R)$ s'obtient en faisant la division euclidenne de $A$ par $B$ :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{A}{B} = Q + \dfrac{R}{B} \\ \deg\left(\dfrac{R}{B}\right) < 0 \end{cases}$$

A noter : si $\deg\left(\dfrac{A}{B}\right) < 0$, alors la partie entière de $\dfrac{A}{B}$ est nulle et $R = A$. Cette étape n'est alors pas nécessaire.

### 3.2 Fin de la méthode sur $\mathbb{C}$

On suppose que $\dfrac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$.

**Remarque (Étape 2.$\mathbb{C}$ : décomposition de $B$ en produit de polynômes irréductibles).** Puisque $B \in \mathbb{C}[X]$ est non nul, $B$ peut se décomposer en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ : il existe

- $n \in \mathbb{N}$,
- $\mu \in \mathbb{C}$,
- des complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$
- et des entiers $r_1, \ldots, r_n \geq 1$ tels que

$$B = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \alpha_i)^{r_i}$$

On notera que le cas $n = 0$ correspond à $B = \mu$, i.e. $B$ constant (non nul).

**Théorème 12.8 (Étape 3.$\mathbb{C}$ : éléments simples sur $\mathbb{C}$)**

Soit $\frac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$. On écrit $B$ en produit de polynômes irréductibles :

$$B = \mu \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{r_i}$$

Alors, il existe une famille $(c_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq r_i}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que

$$\begin{aligned} \frac{R}{B} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{c_{i1}}{X-\alpha_i} + \frac{c_{i2}}{(X-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{c_{ir_i}}{(X-\alpha_i)^{r_i}} \right) \end{aligned}$$

Finalement, on a la décomposition suivante :

**Définition 12.9 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)**

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors $F$ admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ :

$$F \quad = \quad E \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k}$$

où $E \in \mathbb{C}[X]$ est la partie entière de $F$, et les quantités $n$, $(r_i)$, $(\alpha_i)$ et $(c_{ik})$ ont été décrites plus haut. De plus cette décomposition est unique.

À noter que, si $F = \frac{A}{1} \in \mathbb{K}[X]$, alors la décomposition en éléments simples de $F$ est juste $F + 0$ : la partie entière est $E = F$ et, puisque $B = 1$ est constant, on a $n = 0$, si bien que la somme double est nulle.

### 3.3 Fin de la méthode sur $\mathbb{R}$

On suppose que $\frac{R}{B} \in \mathbb{R}(X)$.

**Remarque (Étape 2.$\mathbb{R}$ : décomposition de $B$ en produit de polynômes irréductibles).** Puisque $B \in \mathbb{R}[X]$ est non nul, alors $B$ peut se décomposer en produits de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ : il existe :

- $n, m \in \mathbb{N}$,
- $\mu \in \mathbb{R}$,
- des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,
- des entiers $r_1, \ldots, r_n \geq 1$,
- des polynômes $Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{R}[X]$ dont le discriminant est strictement négatif
- et des entiers $s_1, \ldots, s_m \geq 1$ tels que

$$B = \mu \left( \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{r_i} \right) \prod_{j=1}^{m} Q_j^{s_j}$$

**Théorème 12.10 (Étape 3.$\mathbb{R}$ : éléments simples sur $\mathbb{R}$)**

Soit $\frac{R}{B} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle irréductible unitaire. $B$ admet ainsi une décomposition en produit de polynômes irréductibles :

$$B = \mu \left( \prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{r_i} \right) \prod_{j=1}^{m} Q_j^{s_j}$$

Alors, il existe trois familles d'éléments de $\mathbb{R}$ dénotées $(c_{ik})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq k\leq r_i}}$ $(a_{jk})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq s_j}}$ $(b_{jk})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq k\leq s_j}}$ telles que

$$\frac{R}{B} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{a_{jk}X + b_{jk}}{(Q_j)^k}$$

Finalement, on a la décomposition suivante :

**Définition 12.11 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)**

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. Alors $F$ admet une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ :

$$F \quad = \quad E \quad + \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{r_i} \frac{c_{ik}}{(X-\alpha_i)^k} \quad + \quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{a_{jk}X + b_{jk}}{(Q_j)^k}$$

où $E \in \mathbb{R}[X]$ est la partie entière de $F$, et les quantités $n$, $m$, $(r_i)$, $(\alpha_i)$, $(c_{ik})$, $(Q_j)$, $(a_{jk})$ et $(b_{jk})$ ont été décrites plus haut.
De plus cette décomposition est unique.

### 3.4 Le déroulé de chaque étape

**Méthode (Décomposition en éléments simples)**

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction qu'on veut décomposer en éléments simples.

1. On fait d'abord la division euclidienne de $A$ par $B$ : on obtient alors

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B} \qquad \text{et} \qquad \deg R < \deg B$$

   On a ainsi déterminé la partie entière $Q$. Dans la suite, on s'intéresse uniquement à $\frac{R}{B}$.
2. On décompose $B$ en produit de polynômes irréductibles : la forme peut varier selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
3. Une fois $B$ décomposé, on connait la forme de la décomposition en éléments simples de $F$ et on détermine les coefficients au numérateur (les $c_{ik}$, plus éventuellement $a_{jk}$ et $b_{jk}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

La décomposition en éléments simples de $F = \frac{A}{B}$ est alors

$$\frac{A}{B} \quad = \quad Q \quad + \quad \left[ \text{"décomposition de } \frac{R}{B} \text{ déterminée à l'étape 3"} \right]$$

Pour l'étape 3, tout se fait au brouillon : sur la copie, on n'écrit que la décomposition finale. Le point de départ est d'écrire la forme de la décomposition avec des inconnues pour chaque coefficient au numérateur à déterminer.

Une fois la forme écrite, on a recours à une ribambelle d'astuces et de techniques : les exemples et les exercices sont le meilleur moyen de les comprendre. Voici un récapitulatif :

**Méthode (Déterminer les coefficients à l'étape 3)**

- "Grande puissance" : multiplier par $(X-\alpha)^r$ où $r$ est la plus grande puissance en $\alpha$, puis remplacer $X$ par $\alpha$ partout.
- "Petite puissance" : multiplier par $X$ et faire tendre $X$ vers $+\infty$.
- "Parité" : si la fraction $G := \frac{R}{B}$ est paire, on peut comparer les décompositions de $G(-X)$ et de $G(X)$ et identifier deux à deux les coefficients qui jouent le même rôle. Idem si $G$ est impaire en comparant $G(-X)$ et $-G(X)$.
- "Évaluation" : on peut évaluer toute l'expression en un point $X$ précis et en déduire une relation.
- "Grande puissance, racine imaginaire" : pour les termes $\frac{aX+b}{Q^s}$ avec $Q$ à discriminant négatif et $s$ la plus grande puissance en $Q$, on peut multiplier par $Q^s$ partout et prendre $X=\omega\in\mathbb{C}$ une racine complexe de $Q$. Il n'est pas nécessaire de calculer $\omega$ : on peut uniquement utiliser le fait que $Q(\omega)=0$ pour s'en sortir.
- ...

**Exemple 6.** Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de

$$F = \frac{16}{(X^2-1)^2(X^2+3)}$$

Le degré est strictement négatif : la partie entière est nulle. Le dénominateur se décompose en

$$(X^2-1)^2(X^2+1) = (X-1)^2(X+1)^2(X^2+3)$$

On cherche donc une décomposition sous la forme

$$F(X) = \frac{16}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+3)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2} + \frac{eX+f}{X^2+3}$$

- On multiplie tout par $(X-1)^2$ et on fait $X=1$ : on trouve .
- On multiplie tout par $(X+1)^2$ et en faisant $X=-1$, on trouve .
- On multiplie tout par $X$ et on fait tendre $X$ vers $+\infty$ : on trouve .
- On utilise un argument de parité : $F$ est paire, donc $F(X)$ et $F(-X)$, étant égales, ont nécessairement la même décomposition. Or,

$$\begin{aligned} F(-X) &= \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e(-X)+f}{(-X)^2+3} \\ &= \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{-eX+f}{X^2+3} \end{aligned}$$

Si on compare avec l'écriture de $F(X)$ plus haut, on peut alors identifier les coefficients qui ont le même dénominateur :

$$\begin{cases} -a = c \\ b = d \\ -e = e \\ f = f \end{cases} \quad \begin{cases} a+c = 0 \\ b = d \\ e = 0 \end{cases}$$

on trouve en particulier que $\boxed{e = 0}$ et $\boxed{c = -a}$.

- On évalue en $X = 0$ : on trouve

$$\frac{16}{3} = -a+b+c+d+\frac{f}{3} = 2c+2+\frac{f}{3}$$

d'où

$$16 = 6c+6+f \implies \boxed{6c+f = 10}$$

- On multiplie tout par $X^2+3$ et on prend $X = \omega$ une racine (complexe) de ce polynôme, il ne va rester que

$$\frac{16}{(\omega-1)^2(\omega+1)^2} = e\omega+f = f$$

Ainsi, en réécrivant le dénominateur, et comme $\omega^2 = -3$,

$$f = \frac{16}{(\omega^2-1)^2} = \frac{16}{(-3-1)^2} = \frac{16}{16} = 1$$

d'où $\boxed{f = 1}$.

De $f = 1$, on déduit que

$$6c = 9 \implies \boxed{c = -a = \frac{3}{2}}$$

Si bien qu'on obtient la décomposition :

$$F(X) = \frac{16}{(X-1)^2(X+1)^2(X^2+3)} = \frac{-\frac{3}{2}}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{1}{X^2+3}$$